数理解析研究所講究録
第 875 巻 1994 年 47-56

ポアソン代数の変形量子化について

東京理科大理工数学 大森 英樹 (HIDEKI OMORI)
慶応大理工数理 前田 吉昭 (YOSHIAKI MAEDA)
東京理科大理工数学 吉岡 朗 (AKIRA YOSHIOKA)

概要

Deformation quantization(変形量子化)を構成する帰納的な方法を紹介し帰納的構成法が可能であるための必要十分条件、すなわち Hochschild coboudary 作用素に関する方程式の可解性について論じる。われわれの議論は無限生成の多項式代数に適用可能である。この代数にたいし deformation quantizable な Poisson structure の例を挙げる。

1. Definition and question.

量子化とは 通常 相空間上の関数に 或る Hilbert 空間の作用素を対応させることとされているが、 deformation quantization とは Hilbert 空間の作用素を使わず相空間上の関数のみを用いて量子化を考えること、すなわち関数のなす可換な代数を 非可換かつ結合的な代数へと変形することをもって量子化とせよ という数理物理学の一つの視点である ([1])。数学的には次のように述べられる。

Poisson algebra.

$\mathfrak{a}$ を commutative associative algebra とし $\{\,,\}$ を Poisson bracket(structure) すなわち

$$\{\,,\}:\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\quad s.t.\begin{cases}(i)\ \text{Lie bracket}\\ (ii)\ \{f,gh\}=g\{f,h\}+\{f,g\}h\quad\text{for any}\quad f,g,h\in\mathfrak{a}\end{cases}$$

とする。$(\mathfrak{a},\{\,,\})$ を Poisson algebra と呼ぶ。

Deformation quantization of $(\mathfrak{a},\{\,,\})$.

M を滑らかな多様体とし $\mathfrak{a}=C^\infty(M)$ とおく。$\{\,,\}$ を $\mathfrak{a}$ の Poisson structure とし、Poisson algebra $(\mathfrak{a},\{\,,\})$ を考える。Formal parameter ν を導入し $\mathfrak{a}$ を係数とする形式

的巾級数の全体を

(1) $$\mathfrak{a}[[\nu]] = \prod_{n\geq 0} \nu^n \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \oplus \nu\mathfrak{a} \oplus \cdots \oplus \nu^n \mathfrak{a} \oplus \cdots$$

とおく。Bilinear product $* : \mathfrak{a}[[\nu]] \times \mathfrak{a}[[\nu]] \to \mathfrak{a}[[\nu]]$ は (1) より $\mathfrak{a}$ の元に対しては

(2) $$f * g = \pi_0(f,g) + \nu\pi_1(f,g) + \cdots + \nu^n \pi_n(f,g) + \cdots, \quad \text{for any} \quad f,g \in \mathfrak{a},$$

ただし

(3) $$\pi_j : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathfrak{a} \quad (j = 0,1,2,\cdots); \quad \text{bilinear map}$$

と表される。

次の条件を考える。

(A.1) $*$; associative product,

(A.2) $\nu^m * f = f * \nu^m = \nu^m f, \quad 1 * f = f * 1 = f, \quad \forall m, \quad \forall f \in \mathfrak{a}$,

(A.3) $\pi_0(f,g) = fg, \quad \forall f,g \in \mathfrak{a}$,

(A.4) $\pi_1(f,g) = -\frac{1}{2}\{f,g\}, \quad \forall f,g \in \mathfrak{a}$.

Definition 1. (A.1)~(A.4) を満たす $*$ を Poisson algebra $(\mathfrak{a}, \{\,,\})$ の deformation quatization と呼び、$(\mathfrak{a}[[\nu]], *)$ を $(\mathfrak{a}, \{\,,\})$ の quantized algebra と呼ぶことにする。

ここで 条件 (A.1)~(A.3) より、deformation quantization $*$ は $\mathfrak{a} = C^\infty(M)$ に対する通常の積の associative な変形の一種であることを注意しておきたい。我々は以下で associative な変形と deformation quantization の関係について考察する。

$*$ を可換積の単なる associative な変形としてみる、即ち 条件 (A.1)~(A.3) のみを仮定し 条件 (A.4) をおとして π_1 を $\mathfrak{a} = C^\infty(M)$ の単なる bilinear map であるとする。

$*$ の associativity から自明な式

(4) $$[f,[g,h]] + [h,[f,g]] + [g,[h,f]] = 0,$$

(5) $$[f, g * h] = g * [f,h] + [f,g] * h,$$

(6) $$f \circ (g \circ h) - (f \circ g) \circ h = \frac{1}{4}[g,[h,f]], \quad \forall f,g,h \in \mathfrak{a},$$

ただし

$$[f,g] = f * g - g * f, \quad f \circ g = \frac{1}{2}\{f * g + g * f\},$$

が成立するがそれぞれの式の ν に関する最低次の項を見れば次を得る。

Lemma 2. π_1^- はある Poisson structure を定め、π_1^+ は Hochschild 2-coboundary である、すなわち

$$\delta\pi_1^+(f,g,h) = f\pi_1^+(g,h) - \pi_1^+(fg,h) + \pi_1^+(f,gh) - \pi_1^+(f,g)h = 0, \quad \forall f,g,h \in \mathfrak{a}$$

を満たす。ただし π_1^-, π_1^+ はそれぞれ π_1 の skewsymmetric part, symmetric part とする、i.e, $\pi_1^\pm(f,g) = \frac{1}{2}(\pi_1(f,g) \pm \pi_1(g,f))$, $\forall f,g \in \mathfrak{a}$.

さらに symmetric Hochschld 2-coboundary に関する次の命題

Proposition 3.([2])

$$\delta\pi = 0,\ \pi(f,g) = \pi(g,f),\ \forall f,g \in \mathfrak{a}$$

ならば $\exists\theta$; linear map on $\mathfrak{a}$, s.t.

$$\pi = \delta\theta,\ \text{i.e,}\ \pi(f,g) = f\theta(g) - \theta(fg) + \theta(f)g,\ \forall f,g \in \mathfrak{a}.$$

が成立するが、これより

$$\pi_1^+ = \delta\theta \tag{7}$$

と表される。θ を用いて linear isomorphism

$$T : \mathfrak{a}[[\nu]] \to \mathfrak{a}[[\nu]] \quad s.t. \quad T(f) = f - \nu\theta(f), \quad \forall f \in \mathfrak{a} \tag{8}$$

を導入し あたらしい積

$$\tilde{*} : \mathfrak{a}[[\nu]] \times \mathfrak{a}[[\nu]] \to \mathfrak{a}[[\nu]] \quad s.t. \quad f\tilde{*}g = T^{-1}(Tf * Tg), \quad \forall f,g \in \mathfrak{a} \tag{9}$$

を考えれば

$$f\tilde{*}g = fg + \nu\pi_1^-(f,g) + O(\nu^2)$$

すなわち $\tilde{*}$ が Poisson algebra $(\mathfrak{a}, -2\pi_1^-)$ の deformation quantization となることは容易に確かめられる。まとめると

- associative deformation の同型類の代表元として deformation quantization がとれる、
- deformation quantization (or associative deformation) の無限小は Poisson algebra である、あるいは 非可換結合代数 $(\mathfrak{a}[[\nu]], *)$ には自然に Poisson geometry が対応する、

と標語的に述べることが出来る。

Deformation quantizability

上記の注意から associative deformation があると ある Poisson algebra が得られるが、逆に Poisson algebra を任意にあたえた時、それを展開の 1 次項にもつような変形すなわち deformation quantization の存在を問題にする。

Definition 4. Poisson algebra $(\mathfrak{a}, \{\ ,\ \})$ が deformation quantizable
$\Longleftrightarrow \pi_1 = -\frac{1}{2}\{\ ,\ \}$ なる deformation quantization $*$ が存在する。

次が自然に問題となる。

Question. Poisson algebra $(\mathfrak{a}, \{\ ,\ \})$ は deformation quantizable か？

これに対し次の定理がある。

Theorem S ([3], [4]). $\{\ ,\ \}$ が symplectic ならば deformation quantizable.

今のところ一般の Poisson structure に対して **Question** は不明である、即ち 証明も反例も与えられていないことを注意しておく。

Assciativity and Hochschild coboundary operator

この節の最後に、Hochschild coboundary 作用素を用いて quantized algebra $(\mathfrak{a}[[\nu]], *)$ の associativity の表現を与えておく。

$\mathfrak{a}$ の p-linear map $\pi : \mathfrak{a} \times \cdots \times \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ に対し $p+1$-linear map $\delta\pi$ を

$$
\begin{aligned}
(10) \qquad & \delta\pi(f_1, f_2, \cdots, f_{p+1}) \\
&= f_1\pi(f_2, \cdots, f_{p+1}) + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i\pi(f_1, \cdots, f_if_{i+1}, \cdots, f_{p+1}) \\
&\qquad + (-1)^{p+1}\pi(f_1, f_2, \cdots, f_p)f_{p+1}, \quad \forall f_1, \cdots, f_{p+1} \in \mathfrak{a}
\end{aligned}
$$

により定義すると $\delta^2 = 0$ が成立する。δ を Hochschild coboudary 作用素と呼ぶ。

条件 (A.1) すなわち $f * (g * h) = (f * g) * h, \quad \forall f, g, h \in \mathfrak{a}$ は

$$
(11) \qquad \sum_{i+j=n} \pi_i(f, \pi_j(g, h)) = \sum_{i+j=n} \pi_i(\pi_j(f, g), h), \quad \forall f, g, h \in \mathfrak{a}, \ \ n = 0, 1, 2, \cdots
$$

と同値であるが、Hochschild coboundary 作用素を使い次のように書き換えられる。

Lemma 5. $*$; associative $\Longleftrightarrow \delta\pi_n = Q_n, \ \ n = 0, 1, 2, \cdots,$

ただし Q_n; 3-linear map, s.t. $Q_0 = Q_1 = 0$, and for $n \geq 2$,

$$Q_n(f,g,h) = -\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 1}} \{\pi_i(f,\pi_j(g,h)) - \pi_i(\pi_j(f,g),h)\}, \quad \forall f,g,h \in \mathfrak{a}. \tag{12}$$

2. Step by step construction.

$(\mathfrak{a}, \{\,,\})$ が与えられた時、$\pi_2, \pi_3, \cdots,$ と下から順に構成してゆくことを考える。

Definition 6. Bilinear product $* : \mathfrak{a}[[\nu]] \times \mathfrak{a}[[\nu]] \to \mathfrak{a}[[\nu]]$ が条件

$(\mathrm{A}.1)_k$ $\quad f*(g*h) = (f*g)*h \quad \mod \nu^{k+1}, \quad \forall f,g,h \in \mathfrak{a},$

$(\mathrm{A}.2)_k$ $\quad \begin{cases} \nu^m * f &= f * \nu^m = \nu^m f \quad \mod \nu^{k+1}, \quad \forall m, \\ 1 * f &= f * 1 = f \quad \mod \nu^{k+1}, \quad \forall f \in \mathfrak{a}, \end{cases}$

$(\mathrm{A}.3)$ $\quad \pi_0(f,g) = fg, \quad \forall f,g \in \mathfrak{a},$

$(\mathrm{A}.4)$ $\quad \pi_1(f,g) = -\frac{1}{2}\{f,g\}, \quad \forall f,g \in \mathfrak{a}.$

をみたすとき、$*$ を $(\mathfrak{a}, \{\,,\})$ の order k の deformation quantization と呼び、また $(\mathfrak{a}, \{\,,\})$ は order k で deformation quantizable と呼ぶ。

我々が考察するのは order k の deformation quantization が与えられた時 それが order $k+1$ の deformation quantization になるように π_{k+1} を取り直すことである。

Lemma 5 より $(\mathrm{A}.1)_k$ は

$(\mathrm{B})_l$ $$\delta\pi_l = Q_l$$

が $l = 0,1,2,\cdots,k$ で成立することと同値である。ここで $\delta\{\,,\} = 0 (= Q_1)$ より

Lemma 7. $(\mathfrak{a}, \{\,,\})$ は order 1 で deformation quantizable.

さて 次を仮定する。

$[\mathbf{A}]_k$ $\quad (\mathfrak{a}, \{\,,\})$ は order k で deformation quantizable.

$$\mathcal{A}(f,g,h) = f*(g*h) - (f*g)*h, \quad \forall f,g,h \in \mathfrak{a} \tag{13}$$

とおく。任意の bilinear product $* : \mathfrak{a}[[\nu]] \times \mathfrak{a}[[\nu]] \to \mathfrak{a}[[\nu]]$ にたいする恒等式

$$\begin{aligned}(14)\qquad & f * \mathcal{A}(g,h,t) - \mathcal{A}(f*g,h,t) + \mathcal{A}(f,g*h,t) \\ & - \mathcal{A}(f,g,h*t) + \mathcal{A}(f,g,h)*t = 0, \quad \forall f,g,h,t \in \mathfrak{a}\end{aligned}$$

に条件 $(\mathrm{A}.1)_k$ すなわち $\mathcal{A}(f,g,h) = 0 \mod \nu^{k+1}, etc,$ を代入し ν^{k+1} の係数を見れば

Lemma 8. $\delta Q_{k+1} = 0.$

を得る。ここで Q_{k+1} は与えられた情報 $\pi_1, \cdots, \pi_k$ だけで書かれていることを注意する。$Q_{k+1} = \delta\pi_{k+1}$ となる bilinear map π_{k+1} が存在することが $*$ が order $k+1$ の deformation quantization に延長できるための条件である。

Proposition 9. $*$ が order $k+1$ の deformation quantization に延長できる
$\Longleftrightarrow$ Q_{k+1}; Hochschild 3-cocycle, i.e. $\exists\pi$, s.t. $Q_{k+1} = \delta\pi$.

Vey, Cahen-Gutt theorem.

Porposition 9 より π に関する方程式 $\delta\pi = Q_{k+1}$ の解の存在が重要なわけだが Vey([5]), Cahen-Gutt([6]) らによる次の定理がある。彼らの議論はすべて differential なクラスで行なわれる。

Trilinear map $Q^d : \mathfrak{a}\times\mathfrak{a}\times\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ を 3-differential operator すなわち 各 component について differential operator であるものとし、AQ^d を Q^d の skewsymmetrization とおく。

Theorem VCG ([5], [6]). Q^d を Hochschild coboundary とする。
$$AQ^d = 0 \Longleftrightarrow \exists\pi^d, \text{ bidifferential operator, s.t. } \delta\pi^d = Q^d.$$

3-differntial operator の表象を使うことが証明の要点であることを注意しておく。Proposition 9 および Theorem VCG より すべてを differential operator のクラスに制限してつぎの判定条件が得られる。

Differential deformation quantization

Bilinear product $*^d : \mathfrak{a}[[\nu]] \times \mathfrak{a}[[\nu]] \to \mathfrak{a}[[\nu]]$ を (A.1)~(A.4) かつ

(A.5) π_j $(j = 2, 3, \cdots)$; bidifferential operators

を満たすものとし、differential deformation quantization と呼ぶことにする。この時すべての Q_m は 3-differential operator である。Theorem VCG から

Theorem 10. (cf. [7], p. 163). $*^d$ を $(\mathfrak{a}, \{\ ,\ \})$ の order k の differential deformation quantization とする。

$*^d$ が order $k+1$ の differential deformation quantization に延長できる

$\Longleftrightarrow AQ_{k+1} = 0.$

3. Main results. (Vey, Cahen-Gutt theorem の拡張)

ここで我々の紹介する結果 (cf. [2], Theorem A and §3.2) は 要約するとつぎの事柄である。

- Theorem VCG にたいし 微分作用素の表象を用いない別証明を与えることが出来る。
- したがって定理の成立するクラスを differential operator より広いものに拡張可能であるが、とくに我々は議論を無限変数の多項式に拡張する。
- 我々の解の構成法においては解 π に付帯条件を課することが出来る。この付帯条件により deformation quantizability の検証ができ、いくつかの deformation quanitzable な Poisson algebra の例を挙げることが出来る。

以下 結果を述べる。

Formulation

$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ を不定元、多重指数を $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \cdots,), (\alpha_n \in \mathbf{N})$, その長さを $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n + \cdots$ とし $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \cdots x^{\alpha_n} \cdots$ とおく。$\mathfrak{a}$ を x のなす多項式全体とする: すなわち ($\sum_{finite}$ を有限和をあらわすことにして)

$$\mathfrak{a} = \mathcal{P} = \{ \sum_{finite} a_\alpha x^\alpha \mid a_\alpha \in \mathbf{C},\ |\alpha| < \infty \}.$$

また次の部分代数の系列を考える。

$$\mathcal{P}_i = \{ \sum_{finite} a_\alpha x^\alpha \in \mathcal{P} \mid \alpha = (0, \cdots, 0, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \cdots,)\},$$
$$\mathfrak{a} = \mathcal{P}_1 \supset \mathcal{P}_2 \supset \cdots \mathcal{P}_n \supset \cdots.$$

$Q : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a}$ 上の 3-linear map とする。

Thorem OMY ([2]). Q を Hochschild coboundary とする。

$$AQ = 0 \Longleftrightarrow \exists \pi, \text{ bilinear map on } \mathfrak{a}, \text{ s.t. } \delta\pi = Q.$$

さらに解 π で

$$
\text{(C)} \qquad \begin{cases} \pi^-(x_i, x_j) &= 0, \quad (i, j = 1, 2, \cdots), \\ \pi^+(x_i, f) &= 0, \quad \forall f \in \mathcal{P}_i, \quad (i = 1, 2, \cdots), \end{cases}
$$

を満たすものが存在する。

Proof. $\pi(x^\alpha, x^\beta)$ を $|\alpha + \beta|$ に関する帰納法で構成してゆく。(See [2].)

§2 の議論を $\mathfrak{a} = \mathcal{P}$ の場合に展開すれば次の定理が得られる。

$\mathfrak{a} = \mathcal{P}$ とし $(\mathfrak{a}, \{\,,\})$ を Poisson algebra とする。(2), (3) の型の bilinear product $*$: $\mathfrak{a}[[\nu]] \times \mathfrak{a}[[\nu]] \to \mathfrak{a}[[\nu]]$ を考える。$(\mathfrak{a}, \{\,,\})$ の deformation quantization および order k の deformation quantization を §2 と同様に定義する、即ち それぞれ (A.1)~(A.4) および $(\mathrm{A.1})_k$ ~(A.4) で定義する。

Theorem 11 ([2]). $*$ を $(\mathfrak{a}, \{\,,\})$ の order k の deformation quantization とする。$*$ が order $k+1$ の deformation quantization に延長できる $\Longleftrightarrow AQ_{k+1} = 0$.

Examples (cf. [2])

Theorem OMY の条件 (C) を用いてつぎの Poisson algebras の deformation quantizability が証明できる。

Ex.1. (linear Poisson structure)

$$
(15) \qquad \{\,,\} = \sum_{i,j,l} c_{ij}^l x_l \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}.
$$

を $\mathfrak{a} = \mathcal{P}$ 上の Poisson structure とする。（無限自由度の Lie 環の dual space に入る Lie-Poisson structure とみなせる。）$* : \mathfrak{a}[[\nu]] \times \mathfrak{a}[[\nu]] \to \mathfrak{a}[[\nu]]$ を order k の deformation quantization で

$$
\text{(C)}_l \qquad \begin{cases} \pi_l^-(x_i, x_j) &= 0, \quad (i, j = 1, 2, \cdots), \\ \pi_l^+(x_i, f) &= 0, \quad \forall f \in \mathcal{P}_i, \quad (i = 1, 2, \cdots), \end{cases}
$$

$(l = 2, 3, \cdots, k)$ を満たすものとする。Q の skew symmetrization AQ_{k+1} にたいして次が成立する。

Lemma 12. (cf. [8])

$$
1) \qquad AQ_{k+1}(f, g, h) = \sum_{\substack{(f,g,h) \\ cyclic\ sum}} \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i,j \geq 1}} \pi_i^-(f, \pi_j^-(g, h)), \quad \forall f, g, h \in \mathfrak{a}.
$$

2) AQ_{k+1} は 3-derivation 即ち 各 component に関して一階の微分作用素。

さて Lemma 12 の 1) と仮定 $(\mathrm{C})_l$ $(l=2,3,\cdots,k)$ より

$$\begin{aligned} AQ_{k+1}(x_p,x_q,x_r) &= \sum_{\substack{(p,q,r)\\ cyclic\ sum}} \pi_k^-(x_p,\pi_1(x_q,x_r)) \\ &= \sum_{\substack{(p,q,r)\\ cyclic\ sum}} \pi_k^-(x_p,\sum_s c_{q,r}^s x_s)) = 0, \quad \forall p,q,r. \end{aligned}$$

Lemma 12 の 2) から $AQ_{k+1}=0$. よって Theorem OMY から条件 $(\mathrm{C})_{k+1}$ を満たす π_{k+1}, s.t. $\delta\pi_{k+1}=Q_{k+1}$ が存在する。よって帰納法により linear Poisson algebra は deformation quantizable であることがわかる。特にこの algebra は関係式

$$\begin{cases} x_i * x_j = x_i x_j - \frac{\nu}{2}\sum_s c_{ij}^s x_s, \quad \forall i,j, \\ x_{i_1}\circ(x_{i_2}\circ(\cdots\circ(x_{i_n}\circ f)\cdots) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}f, \quad (i_1\le i_2\le\cdots\le i_n), \quad \forall f\in\mathcal{P}_{i_n}, \end{cases}$$

(ただし $a\circ b=\frac{1}{2}(a*b+b*a)$) を満たしている。

Ex.2. (See [2]). (quadratic Poisson structure)

$\mathfrak{a}=\mathcal{P}$ 上に quadratic Poisson structure

$$\{\,,\} = \sum_{i,j,p,q} c_{ij}^{pq} x_p x_q \frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathcal{P}\times\mathcal{P}\to\mathcal{P}.$$

を考える。ここで係数 c_{ij}^{pq} は p,q について対称、i,j について歪対称で

$$\sum_{\substack{(u,v,w)\\ cyclic\ sum}} \sum_t c_{ut}^{pq} c_{vw}^{tr} = 0, \quad (\forall p,q,r,u,v,w)$$

を満たしている。Poisson algebra $(\mathfrak{a},\{\,,\})$ は deformation quantizable で quantized algebra は関係式

$$\begin{cases} x_i * x_j = x_i x_j - \frac{\nu}{2}\sum_{p,q} c_{ij}^{pq} x_p x_q, \quad \forall i,j, \\ x_{i_1}\circ(x_{i_2}\circ(\cdots\circ(x_{i_n}\circ f)\cdots) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}f, \quad (i_1\le i_2\le\cdots\le i_n), \quad \forall f\in\mathcal{P}_{i_n}, \end{cases}$$

を満たしている。

References

1. F. Bayen et al. *Deformation theory and quantization I*, Annals of Physics, **111**, (1978), 61-110.
2. H.Omori, Y.Maedea, A.Yoshioka, *Deformation quantization of Poisson algebras*, (preprint)
3. M. De Wilde and P.B. Lecomte, *Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds*, Lett. Math. Phys., **7**, (1983), 487-496.
4. H.Omori, Y.Maedea, A.Yoshioka, *Weyl manifolds and deformation quantization*, Advances in Mathematics, **85**, (1991), 224-255.
5. J. Vey, *Deformation du crochet de Poisson sur variètè symplectique*, Comment. Math. Helvetici, **50**, (1975), 421-454.
6. M. Cahen and S. Gutt, *Local cohomology of the algebra of C^∞ functions on a connected manifold*, Lett. Math. Phys. **4**, (1980), 157-167.
7. A. Lichnerowicz, *Deformations d'algebres associees a une variete symplectique (les *-products)*, Ann. Inst. Fourier, **32**, (1982), 157-209.
8. H.Omori, Y.Maedea, A.Yoshioka, *A Poincare-Birkhoff-Witt theorem for infinite dimensional Lie algebras*, to appear in J.Math.Soc.Japan.